

ÜBUNGEN ZU ANALYSIS 1
Aufgaben des Tages 19 — 10. Januar 2023

Aufgabe 1: (1+1 Punkte) Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{falls } x \leq 0, \\ x^3 + 2 & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

- (a) Skizziere den Graph und bestimme das Bild von f .
- (b) Gib alle Intervalle $U \subset \mathbb{R}$ an, auf denen f injektiv ist.
Bestimme für diese Intervalle $U \subset \mathbb{R}$ jeweils die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(U) \rightarrow U$.

Aufgabe 2: (2+1+1 Punkte) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so heißt f *ungerade*.

- (a) Zeige, dass sich jede Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen lässt als Summe

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

einer *geraden* Funktion $f_g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und einer *ungeraden* Funktion $f_u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

- (b) Zeige, dass nur die Nullfunktion gerade *und* ungerade ist.
- (c) Folgere aus (b), dass die Funktionen f_g und f_u aus (a) eindeutig bestimmt sind.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Für nichtleere Mengen A, B, C seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow C$ zwei Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen.

- (a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
- (b) Sind f und g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
- (c) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.
- (d) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.